0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T
4	4	2	4	2	4	4	3	2	4	33

8,3

1/2

Calculus I 22-10-08

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ moet gelden voor elke positieve gehele n. Bewijs door volledige inductie.

① Aantonen voor de kleinste n. $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$ → Geldig voor $n=1$

② Stel het geldt voor $n=p$. Dus $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{p}{p+1}$ geldt.

Geldt het dan ook voor $n=p+1$? Aantonen dus dat

4/4

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} \overset{?}{=} \frac{p+1}{(p+1)+1} = \frac{p+1}{p+2}.$$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(p+1)((p+1)+1)} = \frac{p}{(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{p(p+2)}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} =$$

$$= \frac{p^2+2p+1}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+1)(p+1)}{(p+1)(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$$ Dit moest aangetoond worden. Dus geldt voor $n=p+1$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ geldt voor alle positieve gehele n

3. Voor een oneven functie geldt $f(x) = -f(-x)$.
Links en rechts primitiveren $F(x) = -\cdot - F(-x) = F(-x)$
$-\int f(-x)\,dx = -[-F(-x)] = F(-x)$ $F(x) = F(-x)$

Een even fuctie geldt $f(x) = f(-x)$. De primetieve voldoet hieraan. De primetieve van een oneven functie is even.

$\boxed{4.}$ Een functie is continu in a als geldt $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

2 $f(x)=\frac{4x}{x^2+3}$. Er moet aangetoond worden dat

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3} = f(1) = \frac{4\cdot 1}{1^2+3} = 1 \rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3} = 1$$

Neem een willekeurige $\varepsilon > 0$. Dan hoort daarbij een $\delta > 0$ zodat als $0<|x-1|<\delta$ dan, $\left|\frac{4x}{x^2+3}-1\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{4x}{x^2+3}-1\right| = \left|\frac{4x}{x^2+3}-\frac{x^2+3}{x^2+3}\right| = \left|\frac{-x^2+4x-3}{x^2+3}\right| = \left|\frac{(-x+3)(x-1)}{x^2+3}\right| < \left|\frac{-x+3}{x^2+3}\delta\right|$$

Schat nu $\delta = 1$ dan volgt uit $|x-1|<\delta$ dan $x=2$ Maximaal is

$$\left|\frac{-x+3}{x^2+3}\right|\delta < \left|\frac{-2+3}{2^2+3}\right|\delta = \frac{1}{7}\delta = \varepsilon$$ Dan is $\delta = 7\varepsilon$ een geschikte keus.

voor x dicht bij 0 is dit niet waar

met $\delta = \min(1, 7\varepsilon)$ is $\lim_{x\to 1}\frac{4x}{x^2+3}$ gelijk aan 1, dus continu.

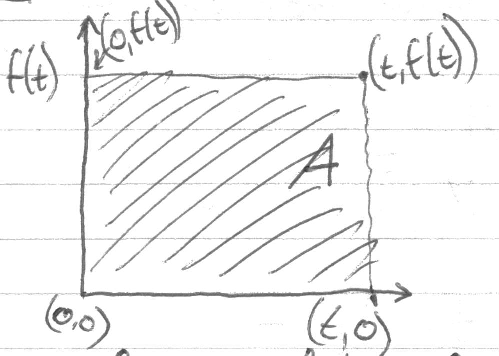
$\boxed{5.}$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1-x}{1-\cosh x}$ Als $x=0$ ingevuld wordt gaat dat richting $\frac{0}{0}$. De stelling van l'hopital mag toegepast worden $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)e^{\sin(x)}-1}{-\sinh(x)}$ gaat wederom naar $\frac{0}{0}$. Nogmaals l'hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)\cdot e^{\sin(x)}+\cos^2(x)\cdot e^{\sin x}}{-\cosh(x)} = \frac{-0\cdot e^0+1^2\cdot e^0}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(x)}-1-x}{1-\cosh(x)} = -1$$

6a In een grafiek ziet de grafiek er zo uit:



De oppervlakte van dit rechthoek is $t \cdot f(t)$. Als $t \to \infty$ is oppervlakte $A = \lim_{t\to\infty} t \cdot f(t)$.

$$A = \lim_{t\to\infty} t \cdot \frac{t+\ln t}{t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t+\ln t}{t} = 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t}$$

$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t}$ gaat naar $\frac{\infty}{\infty}$, dus l'hopital. $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{t}\right)}{1} = 0.$

$$A = 1 + \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 1.$$

6b De oppervlaktefunctie $A(t) = 1 + \frac{\ln t}{t}$ differentieren en gelijk stellen aan nul.

$$A'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln t = 0 \rightarrow \ln t = 1 \rightarrow t = e$$

$A(e) = 1 + \frac{\ln e}{e} = 1 + \frac{1}{e}$ is de maximale oppervlakte.

$A(1) = 1 + \ln 1 = 1$ en

$\lim_{t\to\infty} A(t) = 1 + \frac{\ln t}{t} = 1$ zijn de minimale oppervlakten.
Alleen is de oppervlakte in $t \to \infty$ niet te bereiken.

Heel goed

7. $\int_1^\infty \frac{3x-1}{4x^3-x^2}\,dx$ Eerst breuksplitsen met factoren x, x^2, $4x-1$

3

$$\frac{3x-1}{4x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{4x-1} \rightarrow A\cdot x\cdot(4x-1) + B(4x-1) \cdot Cx^2 = 3x-1$$

$$x^2(4A+C) + x(-A+4B) + (-B) = 3x-1$$

$$A=1 \quad B=1 \quad C=-4$$

Dus:

$$\frac{3x-1}{4x^3-x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-\frac{1}{4}}$$

$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-\frac{1}{4}}\right)dx$ is niet op te lossen voor een grens die naar ∞ gaan. Dit moet met een on-eigenlijke integraal:

$$\lim_{c\to\infty}\int_1^c \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-\frac{1}{4}}\right)dx \underset{\lim_{c\to\infty}}{=} \left[\ln|x|-\frac{1}{x}-\ln\left|x-\frac{1}{4}\right|+C_{st}\right]_1^c =$$

$$=\lim_{c\to\infty} \ln|c|-\frac{1}{c}-\ln\left|c-\frac{1}{4}\right|-\ln|1|+\frac{1}{1}+\ln\left|1-\frac{1}{4}\right|+\cancel{C_{st}} =$$

$$=\lim_{c\to\infty} \ln|c|-0-\ln\left|c-\frac{1}{4}\right|-0+1+\ln\left(\frac{3}{4}\right)+\cancel{C_{st}}$$

$\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$

$\ln(a)-\ln(b)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$=\lim_{c\to\infty} \ln\left|\frac{3c}{4c-1}\right|+1+\cancel{C_{st}} = \ln\left(\frac{3}{4}\right)+\cancel{C_{st}}.\ +1$$

$$\int_1^\infty \frac{3x-1}{4x^3-x^2}\,dx = \ln\left(\frac{3}{4}\right)+\cancel{C_{st}}.\ +1$$

$\boxed{8.}$ $L=\int_1^4 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$f(x)=\sqrt{x}\cdot\left(1-\frac{1}{3}x\right)$ $\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(1-\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{6}\sqrt{x}-\frac{1}{3}\sqrt{x}$

$=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (f'(x))^2=\frac{(1-x)^2}{4x}$

$$L=\int_1^4\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{4x}}\,dx=\int_1^4\sqrt{\frac{1+2x+x^2}{\cancel{4x}}}\,dx \quad \ldots$$

Calculus 1 22-10-08

$\boxed{9.}$ $(x+1)y' = x(y^2+1) \Rightarrow \frac{1}{y^2+1}y' = \frac{x}{x+1} \Rightarrow$

$\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{x}{x+1}\,dx$ substitutie $x+1=u$, $x=u-1$, $dx=du$ goed!

$\arctan(y)+C = \int \frac{u-1}{u}\,du$

$\arctan y + C = \int 1-\frac{1}{u}\,du = [u - \ln u + C]$

$\arctan y = x+1 - \ln(x+1) + C_{st}$

goed! $y = \tan(x - \ln(x+1) + C_{st})$

$\boxed{2.}$ $z = a+bi$

$z^3(z^2-2z+1+2i) = iz^2 - 2iz + i(1+2i) \Rightarrow$

$z^3(z^2-2z+1+2i) = i(z^2-2z+(1+2i)) \Rightarrow$

$z^3 = i \quad \vee \quad z^2-2z+1+2i = 0.$

$z^3 = e^{\frac{1}{2}\pi i} \leftarrow +2k\pi$

$z = e^{\frac{1}{2}\pi i \cdot \frac{1}{3}}$

$z = e^{\frac{1}{6}\pi i} \to r=1 \quad \theta = \frac{1}{6}\pi$

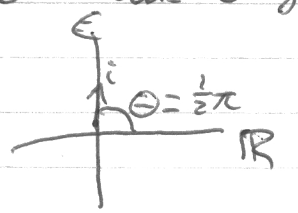
$\tan(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{b}{a} \to b = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,a$

$r = 1 = \sqrt{a^2+b^2}$

i is te schrijven als $r \cdot e^{\theta i}$

$a=0 \quad b=1, \quad r = \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$\tan\theta = \frac{b}{a} \to$ niet direct op te lossen maar uit het complexe vlak volgt $\theta = \frac{1}{2}\pi$



$\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a^2} = 1$

$1\frac{1}{2}a^2 = 1 \quad a = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\cancel{b = \pm\frac{1}{3}\sqrt{2}}$

Z is in de vorm $\boxed{\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \pm \frac{1}{3}\sqrt{2}\,i}$ als moet gelden

$z^3(z^2-2z+1+2i) = iz^2 - 2iz + i(1+2i)$